

METODE PRECIZNIH GEODETSKIH MERENJA

- skripta za drugi deo ispita –

Doc. dr Vladimir Bulatović

Beograd 2012

| | |
|---|----|
| 1. GNSS sistemi | 3 |
| 1.1 Kratak istorijat..... | 3 |
| 1.2 Određivanje pozicija pomoću GNSS sistema | 3 |
| 1.3 Izvori grešaka | 4 |
| 1.3.1 Greške satelitskog porekla | 5 |
| 1.3.1.1 Greške zbog loše geometrije satelita..... | 5 |
| 1.3.1.2 Greške efemerida | 6 |
| 1.3.1.3 Greške časovnika u satelitu..... | 6 |
| 1.3.1.4 Greške teorije relativiteta | 7 |
| 1.3.2 Greške prostiranja signala | 7 |
| 1.3.2.1 Greške jonosferskog kašnjenja signala | 8 |
| 1.3.2.2 Greške troposferskog kašnjenja signala | 10 |
| 1.3.2.3 Greške višestruke refleksije | 12 |
| 1.3.3 Greške prijemnika | 12 |
| 1.3.3.1 Greške usled šuma u prijemniku..... | 12 |
| 1.3.3.2 Greške sinhronizacije časovnika prijemnika..... | 12 |
| 1.3.3.3 Greške ekscentriciteta faznog i geometrijskog centra | 13 |
| 1.4 Funkcionalni model kodnih i faznih pseudodužina | 13 |
| 1.5 Zaključak..... | 15 |
| 2. INERCIJALNI NAVIGACIONI SISTEMI..... | 16 |
| 2.1 Koordinatni sistemi | 18 |
| 2.1.1 Koordinatni sistem vozila i lokalni navigacioni koordinatni sistem..... | 18 |
| 2.1.2 Lokalni navigacioni i globalni geocentrični koordinatni sistem..... | 19 |
| 2.2 Jednačine navigacije..... | 19 |
| 2.3 Izvori grešaka | 20 |
| 2.3.1 Bias (greške akcelometra) i drift (greške žiroskopa) | 20 |
| 2.3.2 Greške usled promene temperature..... | 21 |
| 2.3.3 Histereza..... | 21 |
| 2.3.4 Vibracije..... | 21 |
| 2.3.5 Neupravnost žiroskopa i akcelometara | 21 |
| 2.3.6 Slučajni šum..... | 22 |
| 2.4 Sprega sa GNSS uređajima | 22 |
| 2.5 Kalmanovo filtriranje | 23 |
| 2.6 Zaključak..... | 24 |
| 3. LIDAR | 26 |
| 3.1 Metod otklanjanja sistematskih uticaja | 26 |
| 3.1.1 Slučaj 1: konstantni sistematski uticaj | 27 |
| 3.1.2 Slučaj 2: promenljiv sistematski uticaj kao funkcija polinoma prvog reda..... | 28 |

| | |
|--|----|
| 3.1.3 Slučaj 3: promenljiv sistematski uticaj kao funkcija polinoma drugog reda..... | 28 |
| 3.2 Određivanje optimalnog broja tačaka za kalibraciju DEM-a..... | 29 |
| 3.3 Zaključak..... | 29 |

1. GNSS sistemi

GPS sistem je izrađen i ostvaren od strane američkog Ministarstva obrane i inicijalno kao deo kosmičkog segmenta lansirano je 24 aktivna i 3 rezervna satelita. Danas, oko 30 aktivnih satelita kruže oko Zemlje na udaljenosti od 20.200 km. GPS sateliti prenose signale koji omogućuju pozicioniranje GPS prijemnika, ako se nalazi na površini zemlje, atmosferi ili u niskoj orbiti. GPS se koristi u cilju navigacije, premera i brojnim drugim slučajevima. GPS signal može se koristiti bez naknade od strane bilo koje osobe u posedu GPS prijemnika. Jedini preduslov je neometan pogled do satelita.

Danas je uobičajeno da se GPS, GLONASS, kao i ostali realizovani, planirani ili budući sistemi nazivaju globalnim navigacionim satelitskim sistemima (GNSS).

1.1 Kratak istorijat

1973. godine razvijen je sistem TRANSIT koji je testiran punih 5 godina koji je kasnije prerastao u GPS sistem. U periodu od 1978-1988 lansirano je 24 satelita.

1983 omogućeno je korišćenje sistema u civilne svrhe.

1990. na godinu dana privremeno je ukinuta SA mera zaštite koja je konačno ukinuta 2000. godine.

2004. lansiran pedeseti GPS satelit.

1.2 Određivanje pozicija pomoću GNSS sistema

U znatno pojednostavljenom pristupu, svaki satelit šalje signale sa sljedećim sadržajem: Ja sam satelitskih X, moja pozicija je Y i ova informacija je poslata u vreme Z. Osim vlastitog položaja, svaki satelit šalje podatke o položaju ostalih satelita. Ovi podaci o orbiti (efemeride) se skladište od strane GPS prijemnika za kasnije proračune.

Za određivanje položaju na Zemlji, GPS prijemnik upoređuje vreme kada je signal poslat od strane satelita s vremenom primljenog signala. Na osnovu proteklog vremena može se izračunati rastojanje između prijemnika i satelita.

GPS je, prema tome, pasivni satelitski sistem zasnovan na trilateracionoj metodi pozicioniranja i merenju dužina principom određivanja vremena puta radio signala. Da bi se, međutim, izmerilo vreme puta radio signala, časovnici u satelitima i prijemnicima moraju biti sinhronizovani sa visokom tačnošću. Pošto se u GPS prijemnike iz razloga ekonomičnosti ugrađuju kvarcni oscilatori znatno manje tačnosti od atomskih oscilatora u satelitima, svi vremenski intervali u trenutku merenja biće opterećeni sistematskom greškom. To znači da su u tom trenutku rastojanja prema svim satelitima podjednako duža ili podjednako kraća od istinitih vrednosti, zbog čega se nazivaju pseudodužinama.

Činjenica da se GPS prijemnicima ne mere dužine već pseudodužine, neznatno menja trilateracioni princip GPS pozicioniranja. Prijemnik sa tačke A simultano meri pseudodužine P_i prema satelitima S_i , čiji su položaji u trenutku merenja poznati zahvaljujući navigacionim porukama koje emituju. Svaka izmerena pseudodužina definiše po jednu sferu čiji je centar u odgovarajućem satelitu. Trodimenzionalni položaj nepoznate tačke A određen je u principu presekom tri takve sfere. Međutim, pošto merene pseudodužine sadrže istu nepoznatu grešku sinhronizacije časovnika prijemnika i satelita b , za kompletno rešenje neophodno ih je najmanje četiri. Matematički izraženo, GPS trilateracija sastoji se u rešavanju jednačina:

$$P_i = \sqrt{(x_A - x_i)^2 + (y_A - y_i)^2 + (z_A - z_i)^2} + b$$

po nepoznatim koordinatama tačke A i nepoznatoj greški sinhronizacije b pri čemu su poznate koordinate satelita označene indeksom $i = 1, 2, 3, 4$.

1.3 Izvori grešaka

Generalno, greške GNSS sistema mogu se svrstati u tri kategorije:

- greške satelitskog porekla
- greške prostiranja signala
- greške prijemnika

U cilju korišćenja GNSS sistema za precizna geodetska merenja, ključno je poznavanje grešaka, kao i metoda za njihovu eliminaciju. Neke greške kao što su greške usled SA zaštite, neće biti razmatrane iz razloga što je SA ukinut.

1.3.1 Greške satelitskog porekla

Greške satelitskog porekla obuhvataju nekoliko tipova grešaka:

- Greške zbog loše geometrije satelita
- Greške efemerida
- Greške časovnika u satelitu
- Greške teorije relativiteta

1.3.1.1 Greške zbog loše geometrije satelita

Važan faktor koji utiče na tačnost određivanja položaja je "geometrija satelita". Pojednostavljeno, satelitska geometrija opisuje položaj satelita međusobno s pogledom na prijemnik.

Ako je u dometu prijemnika 4 satelita i svi su raspoređeni na primer u severozapadu, to dovodi do "loše" geometrije, odnosno lošeg preseka pseudodužina. U najgorem slučaju, određivanje položaja nije ni moguće, kada se merenja sprovode u istom pravcu. Čak iako se utvrdi pozicija, greška može biti i do 100 - 150m. Ako su, s druge strane, četiri satelita dobro raspoređene po celom nebeskom svodu, određena pozicija će biti puno preciznija. Pretpostavimo da su sateliti smešteni na severu, istoku, jugu i zapadu pod 90° stepeni. Pseudodužina se onda može meriti u četiri različita smera, što je odraz "dobre" geometrija satelita.

Satelitska geometrija je takođe loša kada se prijamnik približi visokim zgradama ili objektima. Pomeranjem prijemnika za par metara, značajno se može poboljšati tačnost.

Kao mera kvaliteta geometrija satelita, koriste se DOP (Dilution of precision) vrednosti. Najčešće se govori o:

- GDOP (Geometrijski); Ukupna tačnost, 3D-koordinate i vreme
- PDOP (Pozicioni); 3D-koordinate

- HDOP (Horizontalni); Horizontalna tačnost, 2D-koordinate
- VDOP (Vertikalni); Vertikalna tačnost, visina
- TDOP (Vremenski); Vremenska tačnost, vreme

Preporučene vrednosti za GDOP su manje od četiri. Preko šest smatra se lošim.

1.3.1.2 Greške efemerida

Tačnost određivanja efemerida GPS satelita koju kontrolni segment rutinski postiže iznosi danas 1 – 2m. To su takozvane emitujuće efemeride. Pošto emitujuće efemeride predstavljaju ustvari prognozirane vrednosti, kontrolni segment ih povremeno ažurira (dva puta dnevno), jer im tačnost opada sa protokom vremena.

Nezavisno od kontrolnog GPS segmenta, postoji nekoliko civilnih naučnih organizacija koje se takođe bave određivanjem orbita GPS satelita. Najpoznatija je Međunarodna GPS služba (IGS), koja raspolaže sa preko 200 stanica ravnomerno raspoređenih po čitavom svetu sa kojih se permanentno vrše GPS opažanja. IGS određuje takozvane precizne efemeride, čija je tačnost bolja od 5 cm. Precizne IGS efemeride se mogu slobodno preuzeti sa Interneta, ali za razliku od emitujućih efemerida nisu dostupne u realnom vremenu.

1.3.1.3 Greške časovnika u satelitu

GPS sateliti su opremljeni atomskim rubidijumskim i cezijumskim oscilatorima (časovnicima) koji veoma stabilno održavaju svoju frekvenciju tokom dugog vremenskog perioda. Međutim, i pored visoke tačnosti, ovi časovnici odstupaju od sistemskog GPS vremena za neki mali iznos koji, uz to, nije ni konstantan.

Kontrolni GPS segment određuje pored efemerida i stanje časovnika svakog satelita. Odstupanje pokazivanja časovnika od sistemskog GPS vremena Δt modelira se polinomom drugog stepena:

$$\Delta t = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2$$

pri čemu a_0 , a_1 i a_2 predstavljaju koeficijente, a t_0 je referentno vreme. Pošto sateliti emituju koeficijente u okviru navigacione poruke, korisnik je u stanju da u svakom trenutku vremena popravi pokazivanje časovnika satelita.

Koeficijenti nisu apsolutno tačni jer ih kontrolni segment ocenjuje na osnovu merenja, tako da i popravljena očitavanja satelitskih časovnika sadrže grešku koja se kreće u rasponu 1 – 2 ns. Množenjem brzinom svetlosti dobija se da je greška pseudoduzina usled greške satelitskih časovnika reda veličine 1 m.

1.3.1.4 Greške teorije relativiteta

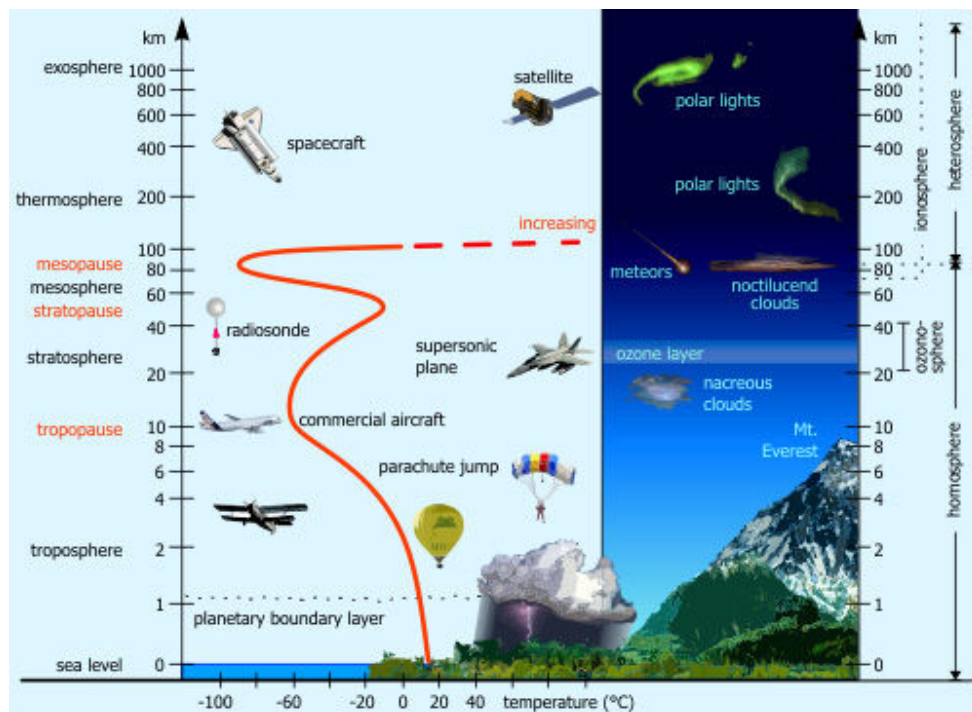
Kako vreme predstavlja bitan faktor u pozicioniranju, neophodno je poznavati ga sa dovoljnom tačnošću. Kako brzina satelita iznosi oko 12000 km/h neophodno je uzeti u obzir i teoriju relativnosti.

Po njoj vreme teče sporije tokom brzog kretanja satelita. Sa poznatom brzinom kretanja satelita greška merenja vremena nagomilava se i do 7 mikrosekundi dnevno. U cilju otklanjanja ovog efekta časovnik na satelitu se podešava na 10.229999995453 Mhz umesto na 10.23 Mhz.

U specijalnim slučajevima treba obratiti pažnju i na kretanje prijemnika usled rotacije Zemlje.

1.3.2 Greške prostiranja signala

Na svom putu od satelitskih antena do prijemnika GPS signali prolaze delom kroz praktično prazan vasioni prostor, a delom kroz Zemljin atmosferski omotač. Pošto se brzina moduliranih nosećih talasa menja pri prolasku kroz medijum koji nije vakuum, to unosi dodatnu nesigurnost u merenje vremena puta signala. U zavisnosti od toga koja se pojava ispituje, Zemljin atmosferski omotač može se podeliti u različite slojeve.



Sa stanovišta kretanja elektromagnetnih talasa koji imaju GPS frekvencije, Zemljina atmosfera deli se na jonosferu i troposferu. Ova dva atmosferska sloja karakteristična su po tome što se u njima GPS signali različito ponašaju. Dominantne greške koje se javljaju prilikom prostiranja signala su tada:

- Greške jonosferskog kašnjenja signala
- Greške troposferskog kašnjenja signala
- Greške višestruke refleksije

1.3.2.1 Greške jonosferskog kašnjenja signala

Deo atmosfere od 80 do 1000 km naziva se jonosfera. Iznad stratosfere na oko 60 km nema ozona koji bi mogao da apsorbuje sunčevo zračenje. Usled toga, u jonosferi dolazi do visokog stepena jonizacije te se jonosfera može podeliti na nekoliko slojeva. Prvi, D na 80 – 100 km, drugi, E oko 100km i F1 i F2 sloj 150 – 250 km i od 250 km pa na dalje. Ovi slojevi igraju značajnu ulogu u radio komunikacijama. Kratki talasi se odbijaju od ovih slojeva.

Sam proces jonizacije sastoji se u odvajanju elektrona iz atoma i molekula gasova atmosfere. Slobodni elektroni koji više nisu u sastavu atoma i molekula nazivaju se jonima. Njihovo stvaranje odvija se pod uticajem raznih oblika Sunčevog zračenja. Jonizacija je najintenzivnija tokom dana i dostiže maksimum kasno popodne. Međutim, tokom noći nema direktnog Sunčevog uticaja, tako da se veliki broj slobodnih elektrona ponovo vezuje za atome.

Osnovnu kvantitativnu karakteristiku stanja jonosfere predstavlja gustina elektrona, odnosno broj slobodnih elektrona u jedinici zapremine, N_e . Ova gustina zavisi od mnogih faktora, kao što su doba dana ili godine, magnetne bure ili jedanaestogodišnji ciklus Sunčevih pega. Varijacija gustine elektrona može dostići i nekoliko redova veličine.

Jonosfera dvojako utiče na GPS signale, zato što elektromagnetni talasi koji napuštaju satelitske GPS antene predstavljaju kombinaciju nosećih talasa visoke frekvencije, i fazne modulacije pseudoslučajnim kodovima niske frekvencije. To znači da se prilikom prolaska GPS signala kroz jonosferu razlikuju dva indeksa prelamanja: grupni indeks prelamanja n_g i fazni indeks prelamanja n_f .

$$n_g = 1 + \frac{40.3N_e}{f^2}, \quad n_f = 1 - \frac{40.3N_e}{f^2}$$

pri čemu f označava frekvenciju, a 40.3 predstavlja numeričku vrednost konstante. Sredine, kao što je jonosfera, čiji indeks prelamanja zavisi od frekvencije, nazivaju se disperzivnim sredinama.

Prisustvo jonosfere će uzrokovati kašnjenje modulacione faze i ubrzavanje faze nosećeg talasa. To znači da će izmerene kodne pseudoduzine biti veće, a fazne pseudoduzine manje od istinite vrednosti. Za fazna merenja jonosferski indeks prelamanja je manji od jedinice, odnosno da se faza nosećeg GPS talasa kreće brže od svetlosti. Ova činjenica nije u suprotnosti sa teorijom relativnosti, jer noseći talasi sami po sebi ne sadrže nikakvu informaciju. Komunikacija koja se ostvaruje pseudoslučajnim kodovima ne može, međutim, da se odvija brže od svetlosti.

Kako elektromagnetni talasi usporavaju obrnuto proporcionalno frekvenciji prilikom prolaska kroz jonosferu, elektromagnetni talasi sa nižom frekvencijom se kreću sporije od elektromagnetnih talasa sa višom frekvencijom. Ako se

pristigli signali na više frekvencija analiziraju na osnovu različitog vremena putovanja, može se proceniti jonosferski uticaj.

Greška izmerenih GPS pseudoduzina usled jonosferskog kašnjenja zavisi od zenitnog odstojanja pravca ka satelitu čiji se signali primaju. Pseudoduzine u pravcu zenita mogu imati grešku zbog jonosferske refrakcije 10 – 30 m. Međutim, kada se opaža satelit koji je blizu horizonta, greška dostiže i 150 m, jer signal u tom slučaju duže putuje kroz jonosferu.

1.3.2.2 Greške troposferskog kašnjenja signala

Atmosferski sloj od fizičke površi Zemlje do visine od približno 80 km naziva se neutralnom atmosferom, i obuhvata tri temperaturno razdvojena regiona: troposferu, stratosferu i deo mezosfere. Za razliku od jonosfere, neutralna atmosfera nije disperzivna sredina. Njen indeks prelamanja zavisi samo od aktuelnih atmosferskih parametara, temperature, atmosferskog pritiska i parcijalnog pritiska vodene pare:

Za modelovanje troposferskog uticaja najčešće se koriste empirijski predikcioni modeli i to:

- Hopfield-ov model
- Saastamoinen-ov model
- Black-ov model

Hopfieldov model zasniva se na pretpostavci da suva i vlažna komponenta troposferskog uticaja ima isti funkcionalni model. Gornji – suvi deo i donji – vlažni su u funkciji nadmorske visine. Troposferska refrakcija se deli na suvi i vlažni deo:

$$N_{trop} = N_{wet} + N_{dry}$$

ili

$$d_{trop} = d_{wet} + d_{dry}$$

kada je reč o troposferskom kašnjenju.

Kod Hopfield-a je $N_{dry,h} = N_{dry,0} * \left(\frac{h_d - h}{h_d} \right)^4$, gde je $h_d = 40136 + 148.72(T - 273.16)$.

Slično se modeluje i za vlažni deo refrakcije: $N_{wet,h} = N_{wet,0} * \left(\frac{h_w - h}{h_w} \right)^4$, gde se za h_w uzima vrednost od 11000 – 12000m.

Tada su:

$$d_{dry} = \frac{1}{\sin(\sqrt{E^2 + 6.25})} * \frac{10^{-6}}{5} * N_{dry,0} * h_d, \quad d_{wet} = \frac{1}{\sin(\sqrt{E^2 + 2.25})} * \frac{10^{-6}}{5} * N_{wet,0} * h_w$$

gde je E elevacioni ugao satelita.

Saastamoinen-ov model ima oblik:

$$T = \frac{0.002277}{\cos z} \left[P + \left(\frac{1255}{T} + 0.05 \right) e^{-\tan^2 z} \right]$$

gde je z elevacioni ugao satelita, T je temperature, a P i e parcijalni pritisci suvog i vlažnog vazduha, respektivno.

Neutralni atmosferski region često se u celini naziva troposferom zbog dominantnog uticaja na prostiranje radio talasa, iako troposfera u užem smislu reči obuhvata samo najnižih 10 km atmosfere gde temperaturni gradijent u proseku iznosi – 6.5°C/km.

Troposfera sadrži 80% ukupne molekularne mase atmosfere, i gotovo celokupnu količinu vodene pare i aerosola. Suvu vazduh troposfere sastoji se od mešavine gasova azota, kiseonika i argona, koja obuhvata 99.95 ukupne zapremine. Prisustvo vodene pare uglavnom je rezultat isparavanja vodenih površina i vegetacije, i njen sadržaj u ukupnoj zapremini iznosi od 1% do 4%. Za razliku od suvog vazduha koji predstavlja veoma konzistentnu mešavinu gasova, vodena para skoncentrisana je u najnižih 4 km troposfere, gde varira kako vremenski tako i prostorno.

Greška merenja pseudoduzina usled uticaja troposferske refrakcije takođe zavisi

od zenitnog odstojanja. U pravcu zenita greška iznosi oko 2.3 m, dok za opažanja prema satelitima koji su blizu horizonta dostiže i 15 m.

1.3.2.3 Greške višestruke refleksije

Višestruka refleksija je pojava da GPS antena pored toga što prima direktno signale sa GPS satelita, prima i signale koji se odbijaju od okolnih glatkih prirodnih ili veštačkih površina. Direktni i odbijeni signali mešaju se u anteni, zbog čega kodne pseudoduzine mogu imati grešku od nekoliko metara. Fazne pseudoduzine, međutim, teorijski ne mogu imati grešku usled višestruke refleksije veću od četvrtine talasne dužine (oko 5 cm). Za razliku od šuma prijemnika koji se ne može nikako otkloniti, uticaj višestruke refleksije moguće je znatno smanjiti ako se GPS antena ne postavlja u blizini reflektujućih površi.

1.3.3 Greške prijemnika

U greške prijemnika najčešće se ubrajaju:

- greške usled šuma u prijemniku
- greške sinhronizacije časovnika prijemnika
- greške ekscentriciteta faznog i geometrijskog centra

1.3.3.1 Greške usled šuma u prijemniku

Merni šum prijemnika utiče na preciznost kodnih i faznih merenja. Šum prijemnika pojavljuje se zbog toga što u elektronskim komponentama uvek ima kretanja elektrona, a time i električne struje. Kodne pseudoduzine imaju zbog toga preciznost od oko 1 m, dok je preciznost faznih pseudoduzina 1 – 2 mm.

1.3.3.2 Greške sinhronizacije časovnika prijemnika

GPS prijemnici koriste kvarcne časovnike, čija je velika prednost mala potrošnja, niska cena i dobra kratkoročna stabilnost. Vreme ovih časovnika mora se dovesti u vezu sa GPS sistemskim vremenom i to se najčešće odvija

automatski nakon početka registracije podataka sa satelita. Nakon što odstupanje ponovo naraste do neke određene vrednosti, časovnik se ponovo sinhronizuje sa sistemskim GPS vremenom koje emituju sateliti.

1.3.3.3 Greške ekscentriciteta faznog i geometrijskog centra

Ova greška predstavlja grešku usled nesavršene izrade prijemnika. Fazni centar varira u zavisnosti od smera antene i snage dolaznog signala. Jedan od modela je da se daju pomaci u odnosu na smer antene za svaku frekvenciju. Ova greška usled nepoznavanja ovih parametara može dostići do 10 cm u verikalnom smislu. Preporuka je da se prilikom merenja vektora koristi par antena istog tipa i isto orjentisanog. Ukoliko se koriste raznovrsne antene, sa National Geodetic Survey (NGS) ili sa Astronomskog instituta u Bernu web strane moguće je preuzeti model faznog centra antene koji postoji za veliki broj tipova brojnih proizvođača.

1.4 Funkcionalni model kodnih i faznih pseudodužina.

Kao što je već rečeno, GPS prijemnik meri kodne pseudodužine do satelita na taj način što upoređuju primljene kodove sa kodovima koje sami generišu, čime efektivno mere ustvari vreme puta signala. Fazne pseudodužine mere se tako što GPS prijemnik upoređuje fazu primljenog nosećeg talasa sa fazom nosećeg talasa kojeg sam generiše, čime efektivno meri faznu razliku. Funkcionalni model ovih pseudodužina predstavlja ustvari funkcionalnu vezu između merenih i nepoznatih veličina.

Pseudodužina $P_{A,f}^i$ izmerena od tačke A do satelita i na frekvenciji f ima sledeći funkcionalni oblik:

$$P_{A,f}^i = D_A^i + c * \partial ts + c * \partial tp + I_f + T ,$$

gde je D istina vrednost, ∂ts i ∂tp su greške časovnika satelita i prijemnika, a I i T jonosferska i troposferska greška kašnjenja. Ostale navedene greške mogu se smatrati zanemarljivim.

Slično za fazne pseudodužine, kako je faza proizvod frekvencije i vremena imamo da je:

$$P_{A,f}^i = D_A^i + c * \partial ts + c * \partial tp + N_{A,f}^i * \lambda_f - I_f + T ,$$

gde je $N_{A,f}^i$ fazna neodređenost, a λ talasna dužina na frekvenciji f . Ona se pojavljuje zato što je noseći talas jednostavni periodični sinusni talas, tako da prijemnik može da meri faznu razliku samo u okviru jedne talasne dužine. Fazna neodređenost ostaje konstantna, odnosno ne zavisi od vremena, sve dok prijemnik neprekidno prati signal sa konkretnog satelita. Bilo kakav prekid praćenja signala znači potpuno novu faznu neodređenost.

Kod kodnih pseudodužina je znak člana koji opisuje jonosfersku refrakciju pozitivan, dok je kod faznih pseudodužina negativan. Ova razlika potiče od činjenice da prisustvo jonosfere produžava kodne pseudodužine, a skraćuje fazne pseudodužine. Slučajna greška merenja kodnih pseudodužina je metarskog nivoa, dok su kod faznih pseudodužina u pitanju milimetri.

Funkcionalni modeli pokazuju da su u strukturi merenih pseudodužina prisutne razne greške, kao što su odstupanja časovnika, troposferska i jonosferska refrakcija, ili nepoznati ceo broj talasnih dužina. Da bi se obezbedila što viša tačnost određivanja koordinata tačaka, neophodno je da se te greške svedu na najmanju moguću meru, ili po mogućstvu potpuno eliminišu. Najefikasniji način da se to postigne je formiranje linearnih kombinacija merenih pseudodužina u vidu takozvanih prostih, dvostrukih i trostrukih razlika.

Proste razlike dobijaju se kada se formira razlika simultano izmerenih pseudodužina od tačaka A i B prema istom satelitu i , ili razlika simultano izmerenih pseudodužina od jedne tačke, na primer A, prema dva satelita i i j . U prvom slučaju radi se o prostim razlikama interferometrijskog tipa. Drugi slučaj predstavljaju proste razlike Doplerskog tipa.

Iz razlike se dobija funkcionalni model jednostruke razlike:

$$P_{AB,f}^i = D_{AB}^i + c * \partial tp_A + c * \partial tp_B + N_{AB,f}^i * \lambda_f .$$

Greške časovnika na satelitu i greške jonosferskog i troposferskog uticaja se potpuno eliminišu kod vektora do 15 km.

Dvostruka razlika dobija se kada se formira razlika između proste razlike simultano izmerenih pseudodužina od tačaka A i B prema satelitu i , i proste

razlike simultano izmerenih pseudodužina od istih tačaka A i B prema drugom satelitu j . Funkcionalni model dvostrukih razlika tada ima oblik

$$P_{AB,f}^{ij} = D_{AB}^{ij} + N_{AB,f}^{ij} * \lambda_f.$$

U dvostrukim razlikama ostaje samo parametar neodređenosti.

Dvostruke razlike su naročito popularne za obradu GPS merenja kod geodetskog pozicioniranja. Njihova glavna prednost sastoji se u tome što ne sadrže greške časovnika prijemnika i satelita, i što je generalno mnogo lakše rešiti fazne neodređenosti. Međutim, dvostruka razlika predstavlja linearnu kombinaciju četiri pseudodužine, tako da im je tačnost još niža od tačnosti prostih razlika. Tačnost trostrukih razlika bila bi još niža tako da se ne koristi u geodetskom pozicioniranju. Obradom dvostrukih razlika takođe se mogu oceniti samo koordinatne razlike između tačaka, a ne i njihove koordinate.

Formiranje prostih, dvostrukih ili trostrukih razlika nije jedini način da se u merenjima smanje ili eliminišu uticaji pojedinih izvora grešaka. Korisnici koji raspolažu dvofrekventnim GPS prijemnicima imaju mogućnost da linearno kombinuju merenja iste pseudodužine izvršena na obe frekvencije. Takve linearne kombinacije nazivaju se frekvencijskim kombinacijama.

Značaj sastoji se u tome što u potpunosti eliminiše uticaj jonosfere, odakle joj potiče i ime (IF = Ionosphere Free). Činjenica da ne sadrži jonosferske uticaje, čini frekvencijsku kombinaciju naročito atraktivnom za geodetsku obradu GPS merenja. Ustvari, kada su GPS prijemnici na većem međusobnom rastojanju (od nekoliko desetina kilometara do nekoliko stotina kilometara), ovakve kombinacije predstavljaju glavni izbor ukoliko treba postići geodetsku tačnost.

1.5 Zaključak

Greške efemerida mogu se umanjiti ako se u naknadnoj obradi koriste precizne efemeride. Ukoliko se merenja vrše na tačkama koje nisu u blizini objekata ili vegetacije koja bi zaklanjala satelite, generalno DOP vrednosti će se kretati u granicama povoljnih uslova, a i višestruka refleksija se svodi na najmanju moguću meru. Dobru praksu predstavlja i definisanje elevacione maske na 10 – 20 stepeni. Sve ostale greške mogu se otloniti ili umanjiti kreiranjem dvostrukih razlika. Poznavanje ekscentriciteta faznih centara, a naročito vertikalne komponente je ključno kod preciznih radova gde se koriste GNSS prijemnici.

2. INERCIJALNI NAVIGACIONI SISTEMI

Inercijalno pozicioniranje se zasniva na merenju ubrzanja, koje se izvodi sensorima pod nazivom akcelerometri. Kao što znamo, ubrzanje neke mase rezultat je delovanja sile na tu masu. Ove tri fizičke veličine povezane su drugim Njutnovim zakonom, koji predstavlja osnovu matematičkog modela inercijalnog pozicioniranja.

Akcelerometar detektuje samo komponentu ubrzanja u pravcu svoje longitudinalne ose. Prema tome, da bi se dobio vektor ubrzanja, tri takve komponente (ax , ay , az) moraju biti izmerene. Po Ajnštajnovom principu ekvivalencije, trodimenzionalni akcelerometar koji nepomično stoji na Zemljinoj površini registrovaće ubrzanje svog instrumentalnog okvira u iznosu od oko 981Gal u pravcu lokalnog zenita. To je posledica akcije sile teže na masu akcelerometra, tako da će očitavanje instrumenta pokazati reakciju te mase koja se može interpretirati kao kretanje instrumentalnog okvira uzrokovano ovom silom. Ovakvo ponašanje opisuje treći Njutnov zakon po kojem svakoj sili akcije odgovara jednaka, ali suprotna po smeru sila reakcije.

Akcelerator montiran na pokretno vozilo registruje zbir ubrzanja teže i ubrzanja vozila u odnosu na gravitaciono polje odnosno Zemlju. On isto tako registruje i solarno i lunarno plimatsko ubrzanje, ubrzanje zbog plime mora i okeana i ubrzanje zbog pomeranja polova. Ako se akcelerometar kreće, onda na njegovu reakciju utiče takođe i Koriolisovo ubrzanje. Prva tri ubrzanja veoma su mala, i u prvoj aproksimaciji obično se zanemaruju. Za pozicioniranje je jedino potrebno ubrzanje u odnosu na Zemlju. To znači da se vektor ubrzanja teže kao funkcija položaja vozila, kao i vektor Koriolisovog ubrzanja moraju oduzeti od ukupnog ubrzanja koje se očitava na izlazu akcelerometra. Vektor teže treba dakle poznavati.

Kada se ubrzanje teže i Koriolisovo ubrzanje oduzmu, preostali vektor ubrzanja vozila menja se sa vremenom i tada je

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \iint_{t_0}^t \vec{a}(t) dt^2$$

gde je $\vec{r}(t)$ vektor položaja u momentu t , $\vec{r}(t_0)$ vektor početnog položaja u početnom trenutku t_0 .

Pretpostavka da se ubrzanje dobijeno pomoću trokomponentnog akcelerometra vezanog za vozilo uvek meri u istom koordinatnom sistemu, je ustvari pogrešna. Instrumentalni okvir u trenutku nije u opštem slučaju paralelan okviru u početnom trenutku, jer se vozilo rotira po sve tri ose za vreme kretanja. Praćenje ovog kretanja može se, na primer, izvesti sa tri slobodna žiroskopa. Teorijski, ako se obrtna osa žiroskopa može slobodno kretati, ona onda održava stalni fiksni pravac u inercijalnom prostoru, dokle god se žiroskopski točak okreće. Tri slobodna žiroskopa sa neparalelnim obrtnim osama mogu prema tome obezbediti sistem fiksnih referentnih pravaca za potrebe pokretnog instrumentalnog okvira. Sve što nakon toga treba uraditi sastoji se u praćenju vremenski promenljive neparalelnosti instrumentalnog okvira u odnosu na sistem fiksiranih referentnih pravaca. Prostorna neparalelnost jedinstveno je određena sa tri nezavisna ugla koji na primer opisuju rotacije oko pravouglanih osa instrumentalnog okvira x, y, z .

Inercijalni navigacioni sistem (INS) se sastoji od najmanje tri akcelerometra, tri žiroskopa i kompjuterske jedinice. Kako INS određuje poziciju relativno u odnosu na početni položaj, inicijalizacija se obezbedjuje bilo kao poznata vrednost, bilo GPS-om. Jednom kada se uređaj inicijalizuje, prednost INS-a je ta što nisu potrebni spoljni resursi za određivanje pozicije, orijentacije ili brzine. Ovo svojstvo čini INS imuno na ometanje i zbog toga ima veliku primenu u vojnoj industriji, navigaciji, premeru i mnogim drugim oblastima.

Nemački naučnik Wernher von Braun je tvorac prvog INS-a koji se koristio za navigaciju V2 projektila početkom II svetskog rata. Sistem se sastojao od dva žiroskopa, jednog akcelerometra i analognog kompjutera sa ciljem da koriguje azimut tokom leta projektila. Nakon rata, von Braun je nastavio svoja istraživanja u Americi koja su sve do kraja 60-tih imala oznaku tajnosti.

Generalno, postoji dva osnovna koncepta kod INS-a:

- žiro-stabilna platforma i
- bezplatformni sistemi.

Oba koncepta se koriste da dobiju Ojlerove uglove od žiroskopa. Kod prvog, akcelerometri su montirani na žiro-stabilnoj platformi čija je uloga da održava akcelerometre u položaju kada je izvršena inicijalizacija bez obzira na pravac i smer kretanja celokupne platforme. Žirostabilne platforme imaju nekoliko osobina koje ovakav sistem dovode u pitanje za potrebe navigacije:

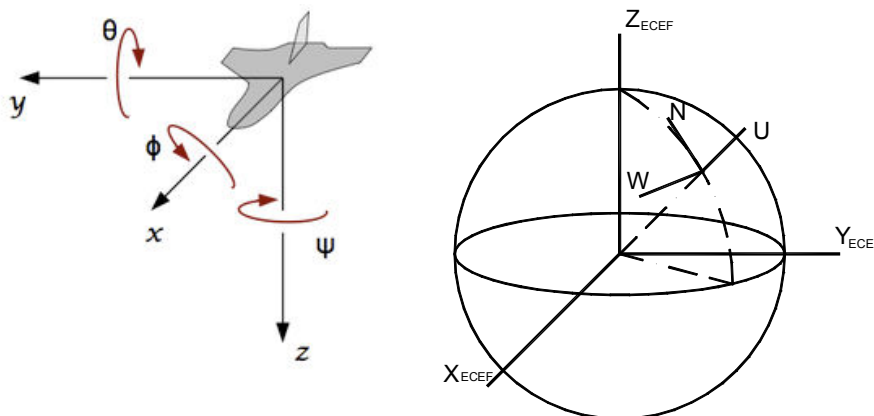
- trenje ležajeva,
- nesavršenost motora,
- velika potrošnja napajanja,
- visoka cena visokokvalitetnih motora, klizećih prstenova, ležajeva i ostalih mehaničkih delova,
- komplikovana rektifikacija koja zahteva specijalizovane kadrove i laboratorije.

Kod bezplatformnih sistema, sam uređaj je fiksiran za telo vozila ili letelice. Ovaj sistem koristi softversko rešenje za održavanje putanje i orijentacije korigujući merenja kao da se obavljaju na žirostabilnoj platformi. Vrednosti ubrzanja se koriguju za zemljinu rotaciju i gravitaciju, dajući brzinu i poziciju pokretnog objekta. Ovaj metod prevazilazi navedene nedostatke kod žirostabilnih inercijalnih sistema umanjujući troškove, veličinu samog uređaja, potrošnju napajanja i kompleksnost celog sistema.

2.1 Koordinatni sistemi

2.1.1 Koordinatni sistem vozila i lokalni navigacioni koordinatni sistem

Inercijalna navigacija koristi nekoliko referentnih okvira. Koordinatni sistem u kojem se ose poklapaju sa INS uređajem koji je najčešće smešten u vozilu ili letelici naziva se koordinatni sistem vozila.



Koordinatni sistem vozila i lokalni navigacioni koordinatni sistem

Za prelazak u lokalni navigacioni koordinatni sistem potrebna je matrica rotacije:

$$R_b^n = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

Ova matrica proizvod je tri rotacije oko osa x , y , z . Kada θ ima vrednost blisku ± 90 , matrica je singularna. Ovo je slučaj uglavnom kod ekstremnih letova borbenih aviona. Tada se ovaj problem mora posebno tretirati.

2.1.2 Lokalni navigacioni i globalni geocentrični koordinatni sistem

Za prelazak iz globalnog geocentričnog koordinatnog sistema u lokalni navigacioni koristi se:

$$R_c^n = \begin{bmatrix} -s\phi c\lambda & -s\phi s\lambda & c\phi \\ -s\lambda & c\lambda & 0 \\ -c\phi c\lambda & -c\phi s\lambda & -s\phi \end{bmatrix}$$

,gde su ϕ i λ latituda i longituda. Ukupna matrica rotacije je tada:

$$R_b^c = R_n^c R_b^n.$$

Ovaj postupak može se primeniti samo kod ortogonalnih matrica. Tada je inverzija jednaka transponovanju. U suprotnom problem se rešava Ojlerovim uglovima.

2.2 Jednačine navigacije

Koristeći drugi Njutnov zakon, merenjem ubrzanja, registruju se promene u kretanju. Jednačine navigacije za globalni geocentrični koordinatni sistem može se izraziti kao:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}^e \\ \dot{P}^e \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\bar{\Omega}_{ie}^e & -\bar{\Omega}_{ie}^e \bar{\Omega}_{ie}^e & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ P \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_b^e & R_b^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{SHC}^e \\ S^b \\ \omega \end{bmatrix}$$

, gde je

$$\bar{\Omega}_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ie} & 0 \\ \omega_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, gde je ω_{ie} promena rotacije Zemlje, R je rotacija izmedju različitih koordinatnih sistema, P i V su vektori pozicije i brzine u globalnom geocentričnom koordinatnom sistemu. Problem ne-ortogonalnosti se rešava sa Kvaternionima.

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Izvori grešaka

Greške inercijalnog sistema imaju kumulativni karakter i najčešće su izazvane temperaturom, vibracijama i nesavršenošću samog mernog uređaja. Najčešće greške koje se javljaju su bias i drift, greške ušted temperatura, histereza, greške ušted vibracije i greške senzora (za merenje ubrzanja i uglovnih odklona).

2.3.1 Bias (greške akcelerometra) i drift (greške žiroskopa)

Ove greške su najrazornije po tačnost samog INS-a. Bias predstavlja sistematsku grešku određivanja ubrzanja, dok se drift odnosi na žiroskope. Greške ovih senzora rezultuju tako da se stvara pomak sa vremenom.. Bias utiče na poziciju sa kvadratom svoje vrednosti i ima kumulativni karakter sa vremenom.

$$\Delta = \frac{1}{2} bias * t^2$$

| bias [m/s ²] | Δ [m] za t=100s | Δ [m] za t=30min |
|--------------------------|------------------------|-------------------------|
| 0.1 | 500 | 162000 |
| 0.01 | 5 | 16200 |
| 0.001 | 0.5 | 1620 |

Imajući u vidu intenzitet greške koji se javlja, za bilo kakva tačnija merenja neophodno je uzeti ih u obzir.

2.3.2 Greške usled promene temperature

Akcelerometar i žiroskopi su osetljivi na promenu temperature. Bias i drift tada spadaju u grupu promenljivih sistematskih grešaka (adicionih i multiplikacionih). Za sisteme koji rade u stabilnim temperaturnim uslovima, izlaganje instrumenta operacionoj temperaturi skoro u potpunosti umanjuje ovaj uticaj. Problemi se javljaju kod upotrebe u uslovima snimanja iz aviona, gde dolazi do promene temperaturnih uslova sa promenama visine.

2.3.3 Histereza

Drift i bias imaju tendenciju da se menjaju svaki put kada se uređaj uključi. To se dešava zbog činjenice da je prisutan šum u merenjima. Obično se koristi nisko propusni filter da se ovakav šum ukloni pre nego što se rezultati merenja senzorom unesu u jednačine kretanja.

2.3.4 Vibracije

Vibriranje može izazvati probleme kod pozicioniranja INS. Prilikom montiranja uređaja treba posvetiti pažnju da se sam uređaj izoluje od rezonantnih frekvencija

2.3.5 Neupravnost žiroskopa i akcelerometara

Ova grupa grešaka je tipična za sve uređaje. Radi se o nesavršenosti izrade i montaže. Jednačine kretanje podrazumevaju da su akcelerometri i žiroskopi upravni odnosno paralelni. Kako je skoro nemoguće postaviti ih u ovakve

odnose, nakon postavljanja, uređaj se laboratorijski ispituje i određuju mu se diferencijalna odstupanja od teorijskih vrednosti. Na osnovu određenih odstupanja unose se popravke za svaki senzor.

2.3.6 Slučajni šum

Ova vrsta grešaka spada u red slučajnih grešaka i za razliku od ostalih gore navedenih grešaka koje imaju sistematski karakter, ostaju u rezultatima merenja i ne mogu se otkloniti ni uvođenjem popravaka, ni randomizacijom, ni filtriranjem, ni kovarijacionom analizom.

2.4 Sprega sa GNSS uređajima

Na slici je prikazana sprega GPS uređaja i inercijalnog sistema. GPS na izlazu šalje NMEA rečenice sa tipom GGA. Tip GGA ima oblik:

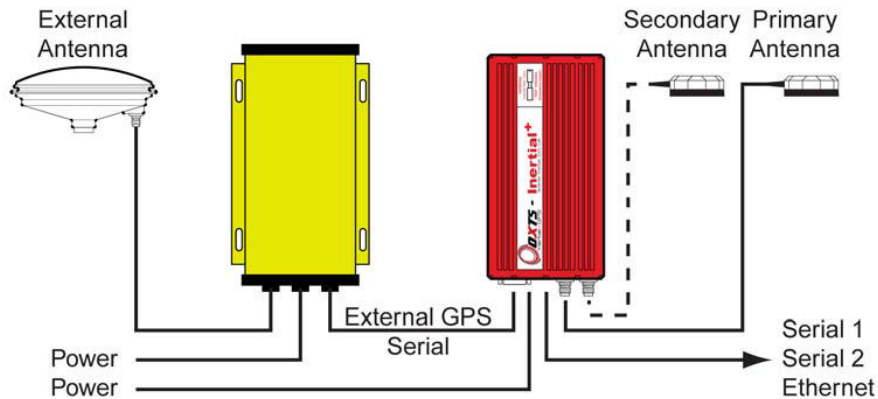
\$GPGGA

Global Positioning System Fix Data

| Name | Example Data | Description |
|---|---------------|--|
| Sentence Identifier | \$GPGGA | GPS Fix Data |
| Time | 170834 | 17:08:34 Z |
| Latitude | 4124.8963, N | 41d 24.8963' N or 41d 24' 54" N |
| Longitude | 08151.6838, W | 81d 51.6838' W or 81d 51' 41" W |
| Fix - 0 = Invalid - 1 = GPS fix - 2 = DGPS fix | Quality: 1 | Data is from a GPS fix |
| Number of Satellites | 05 | 5 Satellites are in view |
| Horizontal Dilution of Precision (HDOP) | 1.5 | Relative accuracy of horizontal position |
| Altitude | 280.2, M | 280.2 meters above mean sea level |
| Height of geoid above | -34.0, M | -34.0 meters |

| | | |
|-----------------------------|-------|--|
| WGS84 ellipsoid | | |
| Time since last DGPS update | blank | No last update |
| DGPS reference station id | blank | No station id |
| Checksum | *75 | Used by program to check for transmission errors |

Inercijalni system preuzima ove rečenice i koristi ih za inicijalizaciju i filtriranje sopstvenih merenja. Na svom izlazu Inercijalni system može davati takođe NMEA izlaz sa različitim tipovima rečenica koje mogu biti istog tipa kao kod GPS-a ili sopstvenog sa dopunjenim informacijama o uglovima otklona, merenog ubrzanja, pozicije...



2.5 Kalmanovo filtriranje

Kalmanovo filtriranje može se koristiti za stohastičku procenu pozicije na osnovu merenja pozicije GPS-om i inercijalnog sistema. Princip je takav da se za određene vremenske trenutke poznaju uslovno tačne vrednosti (pozicije određene GPS-om) i merene vrednosti dobijena senzorom (inercijalni sistem). Generalno, na osnovu razlika procenjuje se greška pozicije između dva poznata trenutka. Procenjenom greškom koriguju se vrednosti sa mernog uređaja. Kalmanov filter u trenutku k je izveden iz stanja u trenutku $k-1$ u skladu sa:

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + \omega_k$$

, gde je F_k model stanja prelaza koji se primjenjuje na prethodno stanje x_{k-1} , B_k je kontrolni ulaz vektora u_k , a ω_k je proces šuma koji se pretpostavlja da će biti

povučen iz nulte srednje multivarijantne normalne distribucije s kovarijansom Q_k .

$$\omega_k \sim N(0, Q_k)$$

U vremeskom trenutku k merenje z_k istinite vrednosti x_k je funkcija:

$$z_k = H_k x_k + v_k$$

, gde je H_k model koji mapira pravo stanje, a v_k model belog šuma sa očekivanjem 0 i kovarijansom R_k .



Merenja GPS-om i Inercijalnim sistemom potpomognutim GPS-om

Crvenom linijom mapirane su pozicije određene INS-om potpomognuto GPS-om, dok je žutom linijom mapiran GPS u režimu kontinualne kinematike. Mesta na kojima GPS ima fiksno rešenje sa centimetarskom tačnošću koriste se kao kontrolna merenja za Kalmanovo filtriranje. Na mestima gde GPS odskače (ispod krošnji drveća i u blizini visokih objekata), inercijalni sistem prikazuje korektne pozicije.

2.6 Zaključak

Greške INS-a nastale usled grešaka senzora akcelerometra i žiroskopa – bias i drift mogu se umanjiti primenom algoritama kao što je Kalmanovo filtriranje. Ako se koriste akcelerometri sa greškom od 0.0001 m/s^2 i GNSS pozicije na svakih 15s, greška INS-a je zanemarljiva.

Greške nepravnosti senzora i kalibracija INS-a mogu se vršiti samo u specijalizovanim laboratorijama. Kalibraciju vrše proizvođači i garantuju za tačnost podataka.

Većina INS uređaja poseduje nisko propusne filtere za uklanjanje šuma koji izazivaju histerezu.

Jedini izvori grešaka na koje korisnici mogu itacati jesu greške temperature i greške nastale usled vibracija. Klimatizacijom instrumenta ili izlaganju temperaturnim uslovima u trajanju od 15 min greške usled promene temperature se marginalizuju. Što se tiče uticaja vibriranja, preporuka je da se prilikom montaže vodi računa o načinu montiranja.

3. LIDAR

LIDAR (Laser Imaging Detection and Ranging) je složen sistem za premer rostora iz vazduha. Sistem se sastoji iz sledećih komponenti:

- GPS -određuje poziciju sistema
- IMU (Inercijalni sistem) -određuje poziciju i nagibe oko sve tri ose
- RGB/NIR kamera - vrši snimanje iz pokreta
- Laserski skener-određuje rastojanja do objekata na zemlji brzinom do 130000 tačaka u sekundi i gustinom do 100 tačaka/m²

Kao rezultat merenja dobija se:

- Trodimenzionalni oblak tačaka (x, y, z)
- Digitalni model površi (prvi i poslednji (bez vegetacije) eho)
- Digitalni model terena (uklonjeni objekti)
- RGB i NIR snimak
- Sekundarne informacije kao što su trodimenzionalni hibridni ili vektorski modeli

Uobičajena relativna tačnost modela sa uračunatom greškom GPS-a i inercijalnog sistema iznosi 5-7cm. Apsolutna greška je uvek bolja od 15cm i može se značajno umanjiti korišćenjem kontrolnih tačaka na zemlji. Pored toga u digitalnim modelima terena često su sadržane čitave grupe grešaka koje imaju sistematski karakter.

3.1 Metod otklanjanja sistematskih uticaja

Visine kontrolnih tačaka H_{GCP} predstavljaju uslovno tačne veličine u poređenju sa H_{DEM} (visine dobijene sa DEM-a).

$$m_{GCP}^2 \ll m_{DEM}^2 ;$$

Ako se formiraju razlike za konačan broj n kontrolnih tačaka

$$\Delta_i = H_{GCP_i} - H_{DEM_i} ,$$

nije teško uočiti da je razlika uglavnom istog predznaka. Razlog tome je moguće postojanje sistematskih uticaja koji izazivaju pomenost rezultata, što znači da se razlika sastoji od slučajne i sistematske greške

$$\Delta_i = \varepsilon_i + \delta_i.$$

Tada sledi

$$\varepsilon_i + \delta_i = H_{GCP_i} - H_{DEM_i}.$$

Za optimalnu ocenu sistematskog uticaja, primeniće se kriterijum

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \min, \text{ odnosno}$$

$$\sum_{i=1}^n (H_{GCP_i} - H_{GDEM_i} - \delta_i)^2 = \min$$

Sam sistematski uticaj može biti konstantan, linearno i nelinearno promenljiv u funkciji položaja.

3.1.1 Konstantni sistematski uticaj

Ukoliko se pretpostavi da je sistematski uticaj konstantan za određenu oblast, sistematska greška može se izraziti kao:

$$\delta = c_1, \text{ gde je } c_1 \text{ konstanta.}$$

Ocenu konstantnog sistematskog uticaja jednostavno se nalazi kao aritmetička sredina razlike visina kontrolnih tačaka i odgovarajućih visina dobijenih sa DEM-a, tj.:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^n (H_{GCP_i} - H_{DEM_i})}{n}.$$

3.1.2 Promenljiv sistematski uticaj kao funkcija polinoma prvog reda

Pod pretpostavkom da sistematski uticaj zavisi od položaja, tj.:

$$\delta_i = \delta(\text{east}, \text{north}),$$

razlika linearno varira u funkciji pomenosti i nagnutosti DEM-a po obe ose. Tada se za ocenu sistematskog uticaja u funkciji položaja, može koristiti polinom prvog reda,

$$\delta_i = a_2 * \text{east}_i + b_2 * \text{north}_i + c_2,$$

Koeficijenti polinoma a_2 , b_2 i c_2 se mogu oceniti metodom najmanjeg kvadrata koristeći formulu:

$$x = -(A^t * A)^{-1} * (A^t * f),$$

gde je x vektor koeficijenata polinoma, A matrica dizajna i f vektor slobodnih članova i formiraju se kao:

$$x_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -\text{east}_1 & -\text{north}_1 & -1 \\ -\text{east}_2 & -\text{north}_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\text{east}_n & -\text{north}_n & -1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} H_{GCP_1} - H_{GDEM_1} \\ H_{GCP_2} - H_{GDEM_2} \\ \vdots \\ H_{GCP_n} - H_{GDEM_n} \end{bmatrix},$$

3.1.3 Promenljiv sistematski uticaj kao funkcija polinoma drugog reda

Promena sistematskog uticaja može imati i nelinearni karakter. Tada se sistematski uticaj može izraziti polinomom drugog reda:

$$\delta_i = a_3 * \text{east}_i^2 + b_3 * \text{north}_i^2 + c_3 * \text{east} * \text{north} + d_3 * \text{east} + e_3 * \text{north} + f_3.$$

Koeficijenti polinoma a_3 , b_3 , c_3 , d_3 , e_3 , f_3 oćeniće se metodom najmanjeg kvadrata. Vektori koeficijenata polinoma x , slobodnih članova f i matrica dizajna A se tada formira na sledeći način:

$$x_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \\ e_3 \\ f_3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} east_1^2 & north_1^2 & east_1 * north_1 & -east_1 & -north_1 & -1 \\ east_2^2 & north_2^2 & east_2 * north_2 & -east_2 & -north_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ east_n^2 & north_n^2 & east_n * north_n & -east_n & -north_n & -1 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} H_{GCP_1} - H_{GDEM_1} \\ H_{GCP_2} - H_{GDEM_2} \\ \vdots \\ H_{GCP_n} - H_{GDEM_n} \end{bmatrix},$$

pri čemu n za ocenu koeficijenta polinoma prvog reda mora biti veći ili jednak od tri, a drugog reda veći ili jednak od šest.

3.2 Određivanje optimalnog broja tačaka za kalibraciju DEM-a

Pri izboru tačaka koji imaju određene obe visine, važno je voditi računa o ravnomernoj raspoređenosti tačaka u regionu za koji se sistematski uticaj ocenjuje. Pored toga treba izbegavati tačke koje nisu na čistini, kako se visina dobijena iz DEM-a ne bi odnosila na vrhove drveća ili na krovove objekata.

Za optimalan izbor broja tačaka na osnovu kojih se ocenjuju koeficijenti, može se koristiti mera globalne pouzdanosti

$$r = \frac{n - u}{n},$$

gde je "n" broj tačaka, a "u" broj nepoznatih parametara koji se ocenjuju. Za projektovanu pouzdanost od 95%, broj tačaka za ocenu konstantne sistematske greške iznosi 20, za sistematsku grešku u funkciji polinoma prvog reda 60, a drugog reda 120. Ovaj broj tačaka bi trebao da obezbedi pouzdanu ocenu parametara i računanje sistematskih uticaja pod sve tri pretpostavke.

3.3 Zaključak

Na osnovu analize nezavisnog skupa tačaka, može se zaključiti da se srednja razlika na osnovu modelovanja sistematske greške smanjuje i do četiri puta za ravničarsku oblast, dok je za brdoviti teren nešto slabija.

Već na osnovu modelovanja konstantne sistematske greške, značajno se poboljšava tačnost DEM-a. Druga dva načina ocene promenljivih sistematskih

uticaja u manjoj meri poboljšavaju tačnost. S obzirom na raspoloživost velikog broja tačaka na osnovu kojih se može kalibrisati DEM i da za ovakav postupak nisu potrebna dodatna merenja može se zaključiti da je kalibracija DEM-a korisna.